

**Pismeni ispit iz Analize III, 23.09.2013.**  
**ispit pisati isključivo hemijskom olovkom**

1. Naći ekstreme funkcije  $z = x^3 + 4x^2y + xy^2 - 12xy - 3y^2$ .

2. (30%) (a) Izmjeniti poredak integracije u integralu  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$ .

(70%) (b) Izračunati  $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  gdje je  $D$  paralelogram sa stranicama  $y = x$ ,  $y = x + a$ ,  $y = a$ ,  $y = 3a$  ( $a > 0$ ).

3. Neka je  $A$  tačka u kojoj prava  $2x - \sqrt{5}y - 1 = 0$  siječe  $y$ -osu, a  $B$  tačka u kojoj data prava siječe  $x$ -osu. Izračunati krivolinijski integral prve vrste  $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ , ako je  $C$  odsiječak date prave između tačaka  $A$  i  $B$ .

4. Izračunati fluks vektorskog polja

$$\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$$

po unutrašnjoj strani sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Pismeni ispit iz Analize III, 23.09.2013.**  
**ispit pisati isključivo hemijskom olovkom**

1. Naći ekstreme funkcije  $z = x^3 + 4x^2y + xy^2 - 12xy - 3y^2$ .

2. (30%) (a) Izmjeniti poredak integracije u integralu  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$ .

(70%) (b) Izračunati  $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  gdje je  $D$  paralelogram sa stranicama  $y = x$ ,  $y = x + a$ ,  $y = a$ ,  $y = 3a$  ( $a > 0$ ).

3. Neka je  $A$  tačka u kojoj prava  $2x - \sqrt{5}y - 1 = 0$  siječe  $y$ -osu, a  $B$  tačka u kojoj data prava siječe  $x$ -osu. Izračunati krivolinijski integral prve vrste  $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ , ako je  $C$  odsiječak date prave između tačaka  $A$  i  $B$ .

4. Izračunati fluks vektorskog polja

$$\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$$

po unutrašnjoj strani sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Zadaci su skinuti sa stranice [pf.unze.ba/nabokov](http://pf.unze.ba/nabokov).  
Za uočene greške pisati na [infoarrt@gmail.com](mailto:infoarrt@gmail.com)

# Nadi ekstreme f-je  $z = x^3 + 4x^2y + xy^2 - 12xy - 3y^2$ .

Rj.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy + y^2 - 12y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 + 2xy - 12x - 6y$

$3x^2 + 8xy + y^2 - 12y = 0$

$4x^2 + 2xy - 12x - 6y = 0$

$3x^2 + 8xy + y^2 - 12y = 0$

$4x(x-3) + 2y(x-3) = 0$

$3x^2 + 8xy + y^2 - 12y = 0$

$(4x+2y)(x-3) = 0$

$3x^2 + 8xy + y^2 - 12y = 0$

$4x+2y=0$  ili  $x-3=0$

$y=-2x$  ili  $x=3$

a) za  $x=3$  imamo

$3 \cdot 9 + 8 \cdot 3y + y^2 - 12y = 0$

$y^2 + 12y + 27 = 0$

$D = 144 - 108$

$y_1 = -9, y_2 = -3$

b)  $y = -2x$

$3x^2 + 8x(-2x) + (-2x)^2 - 12(-2x) = 0$

$3x^2 - 16x^2 + 4x^2 + 24x = 0$

$-9x^2 + 24x = 0$

$-3x(3x-8) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$

Stacionarne tačke su  $M_1(3, -9), M_2(3, -3), M_3(0, 0),$  i  $M_4(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}),$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 8y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8x + 2y - 12$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - 6$

Za  $M_1(3, -9)$

$A = -54, B = -6, C = 0$

$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = -36 < 0$

F-ja u tački  $M_1$  nema ekstrem.

Za  $M_2(3, -3)$

$$A = -6, B = 6, C = 0$$

$$D = AC - B^2 = -36 < 0$$

F-ja u tački  $M_2(3, -3)$  nema ekstrem.

Za  $M_3(0, 0)$

$$A = 0, B = -12, C = -6$$

$$D = AC - B^2 = -144 < 0$$

F-ja u tački  $M_3(0, 0)$  nema ekstrem.

Za  $M_4\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$

$$A = -\frac{80}{3}, B = -\frac{4}{3}, C = -\frac{2}{3}$$

$$D = AC - B^2 = 16 > 0$$

F-ja u tački  $M_4\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right)$  ima ekstrem.

$A < 0 \Rightarrow$  f-ja ima maksimum

$$Z_{\max}\left(\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right) = \dots = \frac{256}{9}$$

Ⓝ Izmjeniti poredak integracije u integralu

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$$

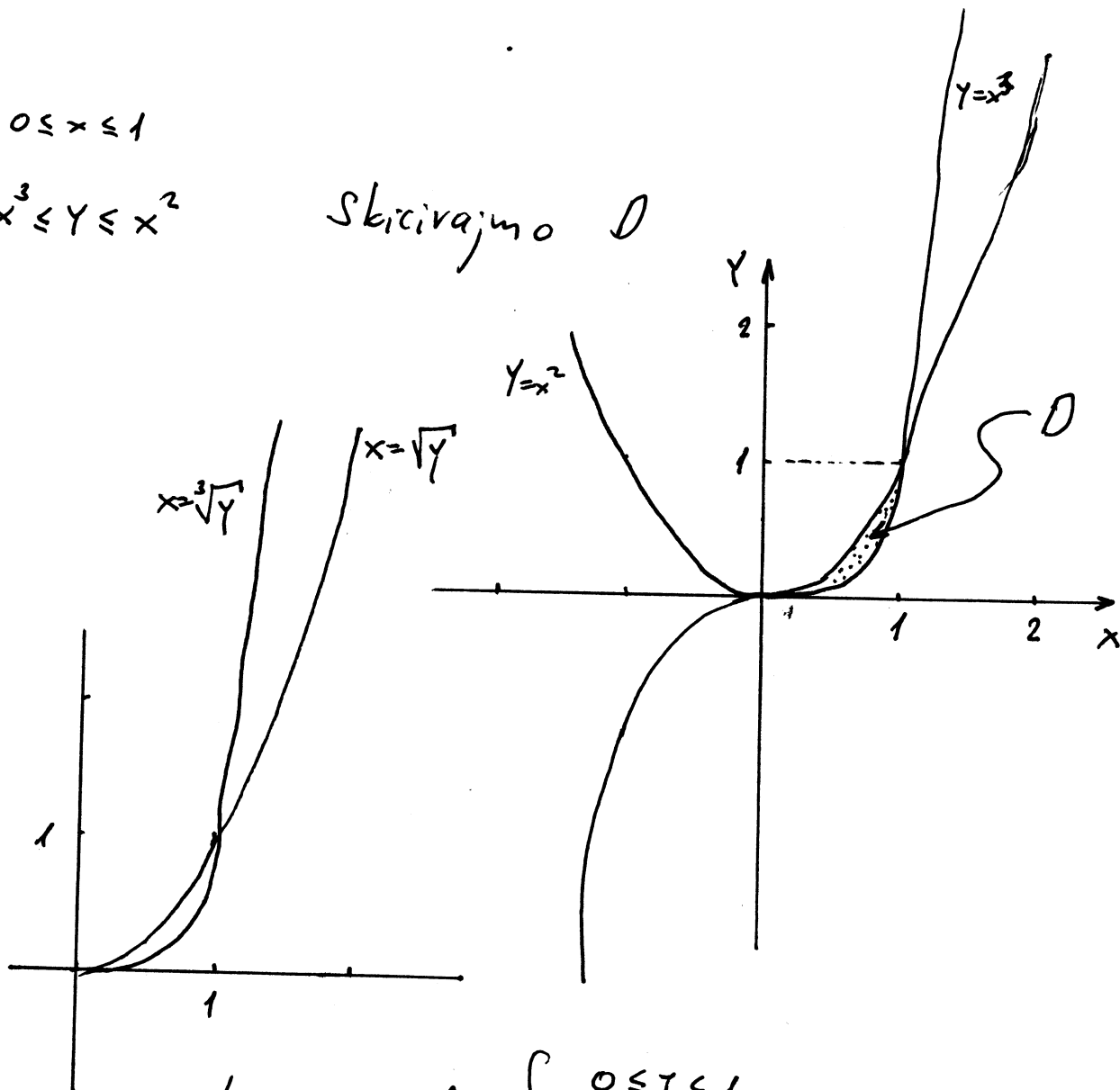
Rj.

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

Skicirajmo  $D$

$$y = x^3$$

$$y = x^2$$



Kako je

to je  $D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt[3]{y} \end{cases}$

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$$

traženo je reći



⊕ Neka je A tačka u kojoj prava  $2x - \sqrt{5}y - 1 = 0$  siječe y-osu, a B tačka u kojoj data prava siječe x-osu. Izračunati krivolinijski integral prve vrste  $\int_c \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ , ako je c odsječak date prave između tačaka A i B.

Rj. Prizjetimo se:

Ako je kriva c data u parametarskom obliku

$c: \begin{cases} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$  tada se krivolinijski integral prve

vrste  $\int_c f(x, y) ds$  računa po formuli

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\eta(t), \mu(t)) \sqrt{(\eta'(t))^2 + (\mu'(t))^2} dt$$

Pronađimo presječne tačke date prave sa osama:

$$2x - \sqrt{5}y - 1 = 0$$

$$2x - \sqrt{5}y = 1$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 0$$

Tražene tačke A i B su

$$A(0; -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$B(\frac{1}{2}; 0)$$

Određimo jednačinu prave kroz tačke A i B koristeći formulu

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$A(x_1; y_1) = A(0; -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$B(x_2; y_2) = B(\frac{1}{2}; 0)$$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad (=t)$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2} (y + \frac{1}{\sqrt{5}}) \quad | \cdot \sqrt{5} \right]$$

$$\left[ x = \frac{\sqrt{5}}{2} y + \frac{1}{2} \right]$$

$$\left[ \frac{\sqrt{5}}{2} y = x - \frac{1}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$$

$$x = \frac{1}{2} t$$

$\Rightarrow$

Parametarski oblik duži c je

$$y + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} t$$

$$c: \begin{cases} x = \frac{1}{2} t \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} t - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 4} = 2\sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 + 1 = (\frac{1}{2} t)^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}} t - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 1 = \dots = \frac{9}{20} t^2 - \frac{2}{5} t + \frac{6}{5}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 1} = \sqrt{\frac{9}{20}} \cdot \sqrt{t^2 - \frac{8t}{9} + \frac{8}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \sqrt{(t - \frac{4}{3})^2 + \frac{200}{81}}$$

$$\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t - \frac{4}{3})^2 + \frac{200}{81}}} = \left| \begin{array}{l} t - \frac{4}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{9} s \quad t=0 \Rightarrow \dots \\ (t - \frac{4}{3})^2 = \frac{200}{81} s^2 \quad t=1 \Rightarrow \dots \end{array} \right|$$

ZA VJEŽBU

$$= \dots = \ln \left( \frac{3\sqrt{6}}{5} + \frac{2}{5} \right)$$



# Izračunati fluks vektorskog polja

$$\vec{v} = (x, -y^2, x^2 + z^2 - 1)$$

po unutrašnjoj strani sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

R:  
Prizetimo se

Fluks vektorskog polja se računa po formuli:

$$\Phi = \iint_S v_x dy dz + v_y dx dz + v_z dx dy$$

U našem slučaju

$$\Phi = \iint_S x dy dz - y^2 dx dz + (x^2 + z^2 - 1) dx dy$$

gdje je  $S$  unutrašnja strana sfere sa centrom u  $C(0,0,0)$  poluprečnika 1.

Ako iskoristimo formulu Gauss-Ostrogradeki imamo

$$\Phi = \iiint_{\Omega} (1 - 2y + 2z) dx dy dz =$$

$\Omega$  je unutrašnjost debe sfere - ako uvedemo sferne koordinate imamo

$$x = \rho \sin \varphi \cos \alpha$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \alpha$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\alpha$$

$$\Omega \xrightarrow{\text{transformacija}} \Omega' : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= \iiint_{\Omega'} (1 - 2\rho \sin \varphi \sin \alpha + 2\rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\alpha =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 \sin\varphi - 2\rho^3 \sin^2\varphi \sin\alpha + 2\rho^3 \sin\varphi \cos\varphi) d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^1 \sin\varphi - 2 \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^1 \sin^2\varphi \sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^1 \sin\varphi \cos\varphi \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{3} \sin\varphi - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\varphi) \sin\alpha + \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi \right) d\varphi$$

$-\frac{1}{2} \cos\varphi d(\cos\varphi)$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \underbrace{-\frac{1}{3} \cos\varphi \Big|_0^{\pi}}_{-1-1} - \frac{1}{4} \sin\alpha \left( \underbrace{\varphi \Big|_0^{\pi}}_{\pi} - \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi}}_{0-0} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\cos^2\varphi \Big|_0^{\pi}}_{1-1=0} \right) d\alpha$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \pi \sin\alpha \right) d\alpha = \frac{2}{3} \alpha \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \pi \cos\alpha \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$